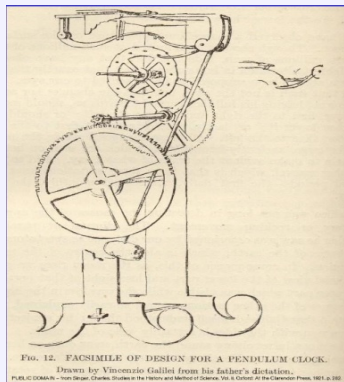


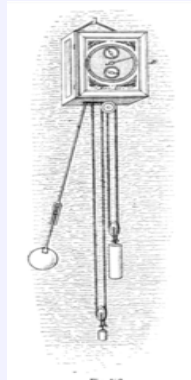
OMM - Matematičko klatno

February 26, 2023

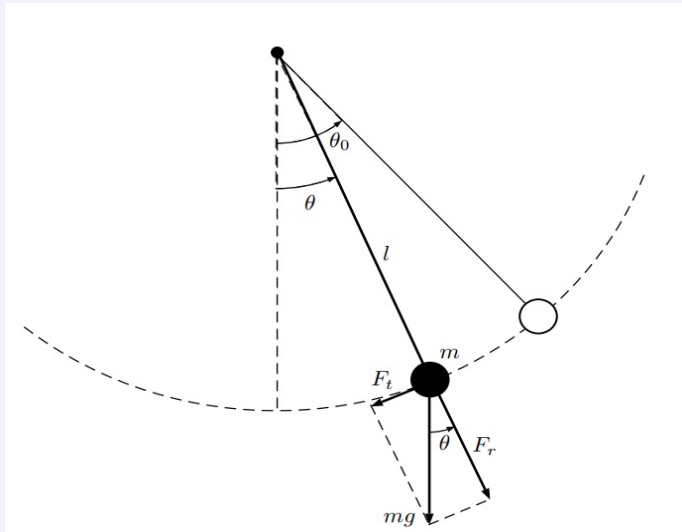
Galileo Galilei (1564 - 1642)



Christiaan Huygens (1629 - 1695)
Prvi sat sa klatnom (patent) - 16.6.1657.



Matematičko klatno



Pretpostavke

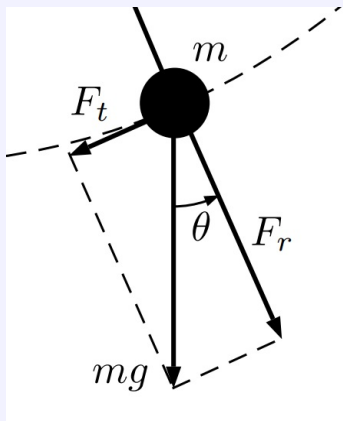
- 1) Klatno (teg) je materijalna tačka mase skoncentrisane u toj tački.
- 2) U svakom trenutku t imamo način da izmerimo položaj te materijalne tačke u ravni vertikalnoj u odnosu na tlo koja sadrži tačku oslonca (zanemarujemo treću koordinatu jer nema bočnih sila, npr. vetra).
- 3) Nalazimo se u vakuumu (zanemarujemo otpor vazduha).
- 4) Zemlja je ravna i sila gravitacije deluje vertikalno na tlo.
- 5) Štap/kanap nema masu.
- 6) Štap/kanap je nestišljiv - ne može da se isteže ili savija.

Šta imamo od podataka?

- Klatno (teg) je mase m .
- Dužina štapa/kanapa je l .
- Početna brzina $v_0 = 0$.
- Početni ugao odklona je θ_0 .
- Na telo deluje gravitaciona sila.
- Klatno (teg) se kreće po luku (položaj tela $s(t)$ je dužina luka od ravnotežnog položaja do tela).

Šta želimo da dobijemo?

- $\theta(t)$.
- Period kretanja tela.
- Kolika je brzina tela u vremenu?



Sila = masa · ubrzanje

mg - gravitaciona sila

F_r - radialna sila (nema dejstvo)

F_t - tangencijalna sila

($F_t = -mg \sin(\theta)$)

Model bez prigušenja:

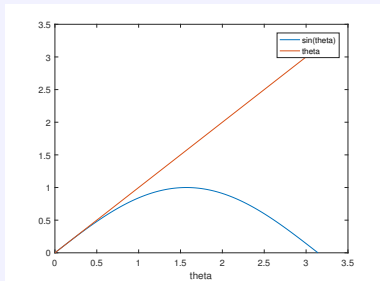
$$\theta''(t) = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot \sin(\theta)$$

$$\theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = 0$$



- numerika
- pojednostavimo model

Pojednostavljen model (specijalni slučaj $\theta \ll 1$)



```

» theta=linspace(0,pi);
» plot(theta,sin(theta),theta,theta);
» legend('sin(theta)', 'theta')
» xlabel('theta')

```

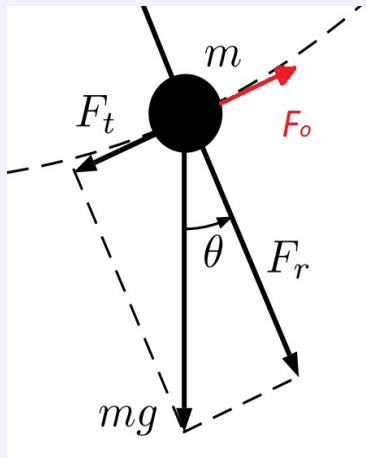
Za $\theta_0 \ll 1$: $\theta''(t) = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot \sin(\theta) \implies \theta''(t) = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot \theta$

Model bez prigušenja za $\theta_0 \ll 1$: $\theta(t) = \theta_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right)$

Period: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ Hajgensov zakon



Otpor sredine, konačno!



- brzina kretanja tela
- gustina sredine
- površina čeonog preseka
- oblik tela

Sila otpora:

$$F_o = -Bv = -B \frac{ds}{dt} = -B \frac{d\theta}{dt} l$$

Model sa prigušenjem:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{B}{m} \frac{d\theta}{dt} - \frac{g}{l} \sin(\theta),$$

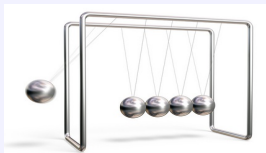
$$\theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = 0$$

Matematičko klatno, opet

- Mehanički rad = sila · pređeni put
- Energija = koliki rad može da izvrši neko telo
- Mehanička energija = kinetička energija + potencijalna energija
- Kinetička energija (K) = energija koju telo ima pri kretanju,

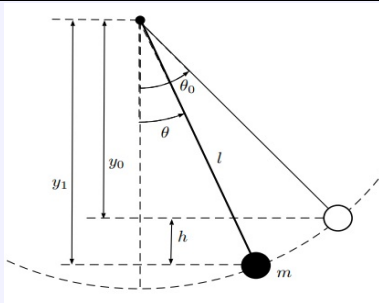
$$K = \frac{1}{2}mv^2$$
- Potencijalna energija (P) = energija uslovljena uzajamnim položajem tela, $P = mgh$

Zakon održanja energije:



Energija se ne može ni stvoriti ni uništiti, već samo prelazi iz jednog oblika u drugi ili sa jednog tela na drugo.

$$E = K + P = \text{const}$$



$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2, \quad \Delta P = mgh$$

$$v = \pm\sqrt{2gh}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{2gh}}{l}, \quad h = ?$$

$$h = l(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))$$

Model bez prigušenja:

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}, \quad \theta(0) = \theta_0$$

Da li je ovo isto kao i prethodni model? DA! $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin(\theta)\right)$

Period:

$$T = 4 \cdot \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}} d\theta$$

- numerika
- Ležandrova eliptička kriva $F(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}} du$

Ako početna brzina nije $v_0 = 0$?

Iz zakona kretanja:

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot \sin(\theta)}, \theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = \frac{v_0}{l}$$

Iz zakona održanja energije:

$$K(0) = v_0 \neq 0 \longrightarrow \frac{d\theta}{dt} = ?$$

Kolika je brzina tela u vremenu u zavisnosti od θ za različite θ_0 i v_0 ?

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{l} \cdot v, \quad \frac{dv}{dt} = -g \sin(\theta)$$

